Journal of Geometry and Physics 9 (1992) 255–280
North-Holland

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Cocycles de Demazure–Kashiwara et géométrie métaplectique

Maurice A. de Gosson

Faculté Libre des Sciences, 13 rue de Toul, F-59046 Lille, France

Reçu le 21 mai 1991
(Revisé le 3 décembre 1991)

We show that it is possible to study thoroughly metaplectic geometry only by means of analytical properties of the metaplectic group and elementary symplectic linear algebra, without reference to algebraic topology.

Keywords: *symplectic, metaplectic, Maslov index*
1991 MSC: 53 C 15, 81 Q 20

Table des matières

1. Introduction

Le groupe métaplectique agit continûment et transitivement sur le revêtement d'ordre quatre de la Grassmannienne lagrangienne. Cette action définit une géométrie, habituellement appellée *géométrie métaplectique*, essentielle en mécanique quantique. L'approche habituelle de la géométrie métaplectique utilise la topologie algébrique [4,11,16]. Le but de cet article est de montrer qu'il est possible de construire et d'étudier cette géométrie de manière beaucoup plus approfondie, en utilisant uniquement les propriétés connues du groupe métaplectique et des concepts d'algèbre linéaire symplectique élémentaires.

Soit $\Lambda = \Lambda(n)$ la *Grassmannienne lagrangienne* de l'espace symplectique (V, Ω) où $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la forme symplectique Ω étant donnée par

$$\Omega(z, z') = \langle x', y \rangle - \langle x, y' \rangle , \tag{1.1}$$

si $z=(x, y)$, $z'=(x', y')$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$. A tout triplet (l_1, l_2, l_3) d'éléments de Λ, que nous appellons conformément à l'usage *plans lagrangiens*, Demazure [5] a associé un entier $s(l_1, l_2, l_3)$ qu'il a appellé *signature* du triplet (l_1, l_2, l_3); c'est la signature de la forme bilinéaire symétrique B_{123} sur le sous-espace vectoriel $V_{123}=\{(z_1, z_2, z_3): z_1+z_2+z_3=0\}$ de $l_1 \times l_2 \times l_3$, dont la valeur en $(Z, Z')=((z_1, z_2, z_3), (z'_1, z'_2, z'_3))$ est

$$B_{123}(Z, Z') = \Omega(z_1, z'_2) . \tag{1.2}$$

D'autre part, Lion et Vergne énoncent dans leur traité [17, pp.39–46, 87–88] les propriétés d'un *indice*, qu'ils attribuent à Kashiwara. Cet indice, qu'ils notent $\tau(l_1, l_2, l_3)$, est la signature de la forme quadratique Q sur $l_1 \times l_2 \times l_3$ dont la valeur en (z_1, z_2, z_3) est

$$Q(z_1, z_2, z_3) = \Omega(z_1, z_2) + \Omega(z_2, z_3) + \Omega(z_3, z_1) . \tag{1.3}$$

La signature s et l'indice τ possèdent, entre autres, les propriétés suivantes:
(1) Si $l_1 \cap l_3 = \{0\}$, c'est à dire si $V = l_1 \oplus l_3$, alors

$$\begin{aligned}&s(l_1, l_2, l_3) \text{ (resp. } \tau(l_1, l_2, l_3)\text{) est la signature de la forme quadratique}\\ &z_2 \mapsto -\Omega(p_{13}z_2, p_{31}z_2) \text{ (resp. } z_2 \mapsto \Omega(p_{13}z_2, p_{31}z_2)\text{) sur } l_2,\end{aligned} \tag{1.4}$$

où p_{ij} est l'opérateur de projection de V sur l_i parallèlement à l_j.
(2) Pour tout quadruplet $(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \Lambda^4$ on a les relations

$$s_i(l_1, l_2, l_3) - s_i(l_1, l_2, l_4) + s_i(l_1, l_3, l_4) - s_i(l_2, l_3, l_4) = 0 , \tag{1.5}$$

où $s_1 = s$ et $s_2 = \tau$; ces relations s'expriment dans le language de la topologie algébrique en disant que s et τ sont des deux-cocycles de Λ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Choisissant dans (1.5) le plan lagrangien l_4 de façon à ce que $l_1 \cap l_4 = l_2 \cap l_4 = \{0\}$ on voit alors, vu (1.4), que $s+\tau=0$. Ces observations justifient donc la terminologie suivante: nous appellerons *cocycle de Demazure–Kashiwara* la fonction $\sigma = -s = \tau : \Lambda^3 \to \mathbb{Z}$.

Des propriétés de s et τ énoncées et prouvées dans les réfs. [5,17] résultent que

$$\begin{aligned}&\sigma \text{ est une fonction antisymétrique de } (l_1, l_2, l_3), \text{ à valeurs dans}\\ &\mathbb{Z} \cap [-n+k, n-k], \text{ où } k = \sup(\dim(l_1 \cap l_2), \dim(l_2 \cap l_3), \dim(l_3 \cap l_1));\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\sigma(l_1, l_2, l_3) \equiv n &+ \dim(l_1 \cap l_2)\\ &+ \dim(l_2 \cap l_3) + \dim(l_3 \cap l_1) , \quad \operatorname{mod} 2 ;\end{aligned} \tag{1.7}$$

la fonction $(l_1, l_2, l_3) \mapsto \sigma(l_1, l_2, l_3)$ est localement constante sur chaque sous-ensemble de Λ^3 sur lequel $\dim(l_1 \cap l_2)$, $\dim(l_2 \cap l_3)$ et $\dim(l_3 \cap l_1)$ sont constants. (1.8)

Soit $\mathrm{Sp} = \mathrm{Sp}(n)$ le groupe symplectique de l'espace symplectique (V, Ω); de (1.3) il résulte immédiatement que l'on a en outre

$$\sigma(sl_1, sl_2, sl_3) = \sigma(l_1, l_2, l_3) \quad \text{pour tout } s \in \mathrm{Sp}\,. \tag{1.9}$$

La variété Λ est connexe; son groupe de Poincaré $\pi_1(\Lambda)$ est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ des entiers relatifs, donc pour tout $q \in \{2, 3, \ldots, +\infty\}$, Λ admet un revêtement Λ_q d'ordre q, et Λ_∞ est le revêtement universel de Λ. Notons $\hat{l}^q \mapsto l$ la projection naturelle $\Lambda_q \mapsto \Lambda$ et $\sigma_q(l_1, l_2, l_3)$ l'image de $\sigma(l_1, l_2, l_3)$ dans $\mathbb{Z}_{2q} = \mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$, avec la convention $\mathbb{Z}_{2\infty} = \mathbb{Z}$. Alors l'application

$$\Lambda_q^3 \ni (\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q, \hat{l}_3^q) \mapsto \sigma_q(l_1, l_2, l_3) \tag{1.10}$$

est un cocycle. Par un argument de cohomologie des faisceaux fins en tous points semblable à celui utilisé par Crumeyrolle dans la réf. [3, 5°)], ce cocycle est un *cobord*, c'est à dire qu'il existe une fonction

$$\mu_q : \Lambda_q^2 \ni (\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) \mapsto \mu_q(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) \in \mathbb{Z}_{2q} \tag{1.11}$$

rendant la décomposition suivante de σ_q possible:

$$\sigma_q(l_1, l_2, l_3) = \mu_q(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) - \mu_q(\hat{l}_1^q, \hat{l}_3^q) + \mu_q(\hat{l}_2^q, \hat{l}_3^q)\,. \tag{1.12}$$

En utilisant les propriétés de l'indice de Maslov, dues à Leray [16, ch. I, §§2.5, 2.8], nous avons construit dans les réfs. [6] (pour $q = \infty$) et [8] une telle fonction μ_q, satisfaisant en outre la propriété suivante (Dazord [4] a construit un indice apparenté à μ_∞):

μ_q est localement constante sur le sous-ensemble $\{(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) : l_1 \cap l_2 = \{0\}\}$ de Λ_q^2. (1.13)

Les propriétés (1.12) et (1.13) *caractérisent* μ_q: si en effet $\nu_q : \Lambda_q^2 \to \mathbb{Z}_{2q}$ est une seconde fonction vérifiant (1.12) et (1.13), il existe $f : \Lambda_q \to \mathbb{Z}_{2q}$, localement constante, telle que

$$\mu_q(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) - \nu_q(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) = f(\hat{l}_2^q) - f(\hat{l}_1^q)$$

pour tous $(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) \in \Lambda_q^2$; or Λ_q est connexe, donc f est constante, d'où $\mu_q = \nu_q$.

Cette unique fonction μ_q, que nous avons appellé *indice de Maslov* sur Λ_q dans les réfs. [6,8], et qui nous a permis de clarifier dans les réfs. [6,7] les problèmes posés par la réf. [17], est définie par les relations suivantes:

$$\mu_q(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) = \text{classe de } \mu_\infty(\hat{l}_1, \hat{l}_2) \text{ modulo } 2q \text{ si } q < \infty, \tag{1.14}$$

où $(\hat{l}_1, \hat{l}_2)$ est une paire quelconque d'éléments de Λ_∞ se projettant en $(\hat{l}_1^q, \hat{l}_2^q) \in \Lambda_q^2$ ([8, §4, définition (4.3)], où nous utilisons, ainsi que dans les réfs. [6,7], la notation μ au lieu de μ_∞), et

$$\mu_\infty(\hat{l}_1, \hat{l}_2) = 2(m(\hat{l}_1, \hat{l}_3) - m(\hat{l}_2, \hat{l}_3)) + \sigma(l_1, l_2, l_3)\,, \tag{1.15}$$

où $\hat{l}_3$ est choisi tel que $l_1 \cap l_3 = l_2 \cap l_3 = \{0\}$ [6, formules (1.6), (1.11); 8, §2, formules (2.5), (2.7)], où m est l'indice défini par Leray [16, ch. I, §2.5] sur le sous-ensemble $\{(\hat{l}_1, \hat{l}_2) : l_1 \cap l_2 = \{0\}\}$ de Λ^2_∞.

La définition de cet indice [16, définition 5.3, p. 44], que Leray appelle "de Maslov" mais que nous appellerons de "Leray–Maslov", et qui complète celle d'Arnold [1], fait uniquement appel à des techniques de topologie algébrique (théorie de l'intersection de Lefschetz [15], en particulier); Dazord [4] et Souriau [21] (voir aussi la réf. [11], ch. IV) en ont donné des définitions équivalentes, ou proches; ces définitions utilisent elles aussi des résultats ou des techniques issues de la topologie algébrique.

Introduisons maintenant la terminologie suivante. Soit un groupe G, noté multiplicativement. Nous appellons *cocycle de* G toute application ω de $G \times G$ dans un groupe additif H, telle que

$$\omega(gg', g'') + \omega(g, g') = \omega(g, g'g'') + \omega(g', g'')\,, \tag{1.16}$$

pour tous g, g', g'' dans G. On dit que ce cocycle est un cobord s'il existe une application α de G dans H telle que

$$\alpha(g) - \alpha(gg') + \alpha(g') = \omega(g, g')\,, \tag{1.17}$$

pour tous g, g' dans G.

Soit alors $\mathrm{Mp} = \mathrm{Mp}(n)$, le groupe métaplectique; c'est [14,16,20,22] la représentation unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de Sp_2, le revêtement d'ordre deux du groupe symplectique Sp. Notons $S \mapsto s$ la projection naturelle $\mathrm{Mp} \to \mathrm{Sp}$. Il est facile de vérifier, utilisant les propriétés (1.5), (1.6) et (1.9) du cocycle de Demazure–Kashiwara que pour tout $l \in \Lambda$ la formule:

$$\sigma_l(s, s') = \sigma(l, sl, ss'l) \tag{1.18}$$

definit un cocycle sur Mp.

Le but de cet article est triple:

(1) Nous montrons dans le paragraphe 3 que ce cocycle est un cobord modulo 8; plus précisément nous construisons [théorèmes 3.1(1) et 3.2(1)], par des méthodes purement analytiques, faisant appel à la méthode de la phase stationnaire, une fonction

$$\dot{\mu}_l : \mathrm{Mp} \ni S \mapsto \dot{\mu}_l(S) \in \mathbb{Z}_8$$

caractérisée par les propriétés suivantes:

$$\dot{\mu}_l(S) - \dot{\mu}_l(SS') + \dot{\mu}_l(S') = \dot{\sigma}_l(S, S')\,, \tag{1.19}$$

$$\dot{\mu}_l \text{ est localement constante (donc } \textit{continue}\text{) sur } \{S \in \mathrm{Mp} : sl \cap Sl = \{0\}\}. \tag{1.20}$$

(2) Dans le paragraphe 4 (théorème 4.1) nous déduisons de cette fonction μ_l une fonction

$$\dot{\mu} : \Lambda_4 \times \Lambda_4 \ni (\dot{l}, \dot{l}') \mapsto \mu(\dot{l}, \dot{l}') \in \mathbb{Z}_8$$

ayant les deux propriétés suivantes:

$$\dot{\sigma}(l_1, l_2, l_3) = \dot{\mu}(\dot{l}_1, \dot{l}_2) - \dot{\mu}(\dot{l}_1, \dot{l}_3) + \dot{\mu}(\dot{l}_2, \dot{l}_3) \text{ pour tous } \dot{l}_1, \dot{l}_2, \dot{l}_3 \text{ dans } \Lambda_4, \text{ où } \dot{\sigma} = \sigma_4, \tag{1.21}$$

$$\dot{\mu} \text{ est localement constante (donc } \textit{continue}\text{) sur } \{(\dot{l}_1, \dot{l}_2) : l_1 \cap l_2 = \{0\}\}. \tag{1.22}$$

Cette fonction $\dot{\mu}$ est donc identique à l'indice de Maslov μ_4 sur Λ_4, qui est caractérisé par les propriétés (1.12), (1.13). La définition et la méthode que nous utilisons permettent de retrouver les propriétés de cet indice de Maslov sur Λ_4, indépendemment de tout recours à la théorie de Leray, et à la réf. [6].

(3) Utilisant les propriétés, établies aux paragraphes 3 et 4, des fonctions σ_l et σ nous identifions, au paragraphe 5, Mp (resp. Λ_4) à un sous-groupe (resp. sous-ensemble) de $\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (resp. $\Lambda \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$).

La loi de groupe de $(\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_l$ est alors donnée par la formule

$$(s, \dot{\mu})(s', \dot{\mu}') = (ss', \dot{\mu} + \dot{\mu}' + \dot{\sigma}(l, sl, ss'l)), \tag{1.23}$$

ou $\dot{\sigma}$ est l'image dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ du cocycle de Demazure–Kashiwara. Munissant $(\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_l$ et $(\Lambda \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_l$ de topologies adéquates, nous montrons qu'il est possible de définir, utilisant l'indice de Maslov, une action de $(\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_l$ sur $(\Lambda \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z})_l$, cette action étant donnée par

$$(s, \dot{\mu})(l', \dot{\lambda}) = (sl, \dot{\mu} + \dot{\lambda} + \dot{\sigma}(l, sl, sl')), \tag{1.24}$$

formule qui n'est autre que (2.5) dans la réf. [7]. Cette action, caractérisée par (1.24), est donc l'action habituelle de Mp sur Λ_4 [voir (2.27)].

Le but de cet article, qui était de construire la géométrie métaplectique uniquement à partir des propriétés du groupe métaplectique et du cocycle de Demazure–Kashiwara, dont les propriétés relèvent de l'algèbre linéaire symplectique élémentaire, est donc atteint.

Certains des résultats du paragraphe 3 ont été annoncés dans la réf. [9], voir aussi la réf. [10].

2. Notations; rappel de certaines propriétés de Λ, Sp et Mp

Nous identifions tous les automorphismes de l'espace vectoriel réel $V = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

avec leurs matrices dans la base canonique de V; ainsi la forme symplectique Ω sur V définie par (1.1) s'écrit

$$\Omega(z, z') = \langle Jz, z' \rangle_V, \quad \text{pour } (z, z') \in V^2, \tag{2.1}$$

où $\langle z, z' \rangle_V = \langle x, x' \rangle + \langle y, y' \rangle$ si $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et J est la matrice-bloc

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

où I (resp. 0) est la matrice unité (resp. la matrice nulle) d'ordre n. Ainsi, une matrice-bloc

$$s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

est dans Sp si et seulement si $sJ{}^ts = {}^tsJs = J$, c'est à dire si et seulement si

$${}^tAD - {}^tCD = I, \tag{2.4a}$$

$${}^tAC = {}^tCA, \tag{2.4b}$$

$${}^tBD = {}^tDB. \tag{2.4c}$$

Soient L et P deux matrices réelles d'ordre n, L inversible et P symétrique. On associe à ces matrices les éléments suivants de Sp:

$$m_L = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & {}^tL^{-1} \end{pmatrix}, \qquad v_P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -P & I \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Soit U le voisinage de l'élément neutre dans Sp constitué des éléments (2.4) avec $\det(A) \neq 0$. Vu (2.4b) et (2.4c), $A^{-1}B$ et CA^{-1} sont symétriques, et vu (2.4a), qui s'écrit $CA^{-1}B + {}^tA^{-1} = D$, on a

$$s = (v_{-CA^{-1}})(m_{-A})J(v_{A^{-1}B})J;$$

U est donc engendré par les matrices J et (2.5). On a donc prouvée, puisque Sp est connexe, que

$$\text{l'ensemble } \bigcup_{L,P} \{J, m_L, v_P\} \text{ engendre Sp}. \tag{2.6}$$

Sp agit transitivement sur Λ, ainsi que sur le sous-ensemble $\{(l, l') : l \cap l' = \{0\}\}$ de Λ^2. Pour $l \in \Lambda$ on note $\mathrm{St}(l)$ le stabilisateur de l dans Sp; c'est le sous-groupe fermé de Sp formé par les matrices s telles que $sl = l$.

Pour tous $(s, l) \in \mathrm{Sp} \times \Lambda$, il existe $(s_1, s_2) \in \mathrm{Sp} \times \mathrm{Sp}$ tel que $s_1 l \cap l = s_2 l \cap l = \{0\}$ et $s = s_1 s_2$. (2.7)

Preuve. Soit $l' \in \Lambda$ tel que $l \cap l' = sl \cap l' = \{0\}$. Il existe s_1 et s'_2 dans Sp tels que $(sl, l') = s_1(l', l)$ et $l' = s'_2 l$. On a donc $sl = s_1 s'_2 l$. Soit $h \in \mathrm{St}(l)$ tel que $s = s_1 s'_2 h$; posons $s_2 = s'_2 h$. Alors $s = s_1 s_2$ et $s_1 l \cap l = l' \cap l = \{0\}$, $s_2 l \cap l = s'_2 l \cap l = l' \cap l = \{0\}$.

Considérons en particulier le plan lagrangien $l = l_0$ défini par $l_0 = \{0\} \times \mathbb{R}^n$.

Lemme 2.1.

(1) *Si* $s \in \mathrm{Sp}$ *est donné par* (2.3), *alors* $\dim(sl_0 \cap l_0) = \mathrm{corang}(B)$; *en particulier* $s \in \mathrm{St}(l_0)$ *si et seulement si* $B = 0$, *et* $sl_0 \cap l_0 = \{0\}$ *si et seulement si* $\det(B) \neq 0$.

(2) *Tout* $s \in \mathrm{St}(l_0)$ *s'écrit, de manière unique,* $s = v_P m_L$ (*ou* $s = m_{L'} v_{P'}$).

(3) *Pour tout* $l \in \Lambda$, $\mathrm{St}(l)$ *a deux composantes connexes.*

Preuve. Écrivant

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in l_0, \qquad s = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}, \tag{2.8}$$

alors $z \in sl_0 \cap l_0$ si et seulement si $By = 0$, donc $\dim(sl_0 \cap l_0) = \dim \mathrm{Ker}(B)$, ce qui prouve (1).

Si maintenant $B = 0$, alors $D = {}^tA^{-1}$ vu (2.4a) et CA^{-1}, ${}^tAC$ sont symétriques vu (2.4b), ce qui permet d'écrire

$$s = v_{-CA^{-1}} m_A = m_A v_{{}^tAC},$$

d'où (2).

Cette propriété montre que $\mathrm{St}(l_0)$ est homéomorphe au produit $\mathrm{Sym}(n) \times \mathrm{Gl}(n)$ de l'ensemble des matrices symétriques réelles par le groupe linéaire réel; or $\mathrm{Sym}(n) = \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ et $\mathrm{Gl}(n)$ a deux composantes connexes, d'où (3) si $l = l_0$; le résultat pour l quelconque en découle puisque $\mathrm{St}(l)$ est conjugué à $\mathrm{St}(l_0)$.

Soit A une forme quadratique réelle sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; il existe des matrices P, L, Q d'ordre n, P et Q *symétriques*, telles que la valeur de A en (x, x') soit

$$A(x, x') = \tfrac{1}{2}\langle Px, x\rangle - \langle Lx, x'\rangle + \tfrac{1}{2}\langle Qx', x'\rangle . \tag{2.9}$$

Nous noterons $\mathscr{A}$ l'ensemble de tous les couples (A, m) où A est une forme quadratique (2.9) telle que

$$\det(L) \neq 0 , \tag{2.10}$$

et m un entier associé à un choix de arg det(L), par la relation

$$m\pi \equiv \arg \det(L) , \quad \mathrm{mod}\ 4\pi . \tag{2.11}$$

Nous noterons une forme quadratique A définie par (2.9) et (2.10): $A=(P, L, Q)$.

A tout $(A, m)\in\mathscr{A}$, $A=(P, L, Q)$, on associe l'opérateur S_A^m dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$S_A^m f(x)=\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^{n/2} \Delta(A)\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}A(x,x')}f(x')\,\mathrm{d}x'\ , \tag{2.12}$$

où $\mathrm{i}^{n/2}=\exp(\mathrm{i}n\pi/4)$, et

$$\Delta(A)=\sqrt{\det(L)}=\mathrm{i}^m\sqrt{|\det(L)|}\ . \tag{2.13}$$

Introduisant l'automorphisme F de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ défini par

$$Ff(x)=\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,x'\rangle}f(x')\,\mathrm{d}x'\ , \tag{2.14}$$

et qui est, au facteur $(1/\mathrm{i})^{n/2}=\exp(-\mathrm{i}n\pi/4)$ près, la transformation de Fourier habituelle, ainsi que les automorphismes M_L^m et V_P de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$M_L^m f(x)=\Delta(A)f(Lx)\ ,\qquad V_Pf(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/2\langle Px,x\rangle}f(x)\ , \tag{2.15}$$

on voit que

$$S_A^m=V_{-P}M_L^mFV_{-Q}\quad \text{si } A=(P, L, Q)\ , \tag{2.16}$$

donc S_A^m est un automorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, d'inverse

$$(S_A^m)^{-1}=S_{A^*}^{m^*}\ ,\quad \text{où } A^*=(-Q, -{}^tL, -P)\ , m^*\equiv n-m, \bmod 4\ . \tag{2.17}$$

Les opérateurs F, M_L^m, V_P, qui vérifient les relations évidentes

$$M_L^mV_P=V_{{}^tLPL}M_L^m\ , \tag{2.18a}$$

$$V_PM_L^m=M_L^mV_{{}^tL^{-1}PL}\ , \tag{2.18b}$$

$$FM_L^m=M_{{}^tL^{-1}}^mF\ , \tag{2.18c}$$

$$M_L^mM_{L'}^{m'}=M_{L'L}^{m+m'}\ , \tag{2.18d}$$

$$V_PV_{P'}=V_{P+P'}\ , \tag{2.18e}$$

se prolongent en des automorphismes de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont les restrictions à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$ sont *unitaires*; il en est par conséquent de même pour les S_A^m. En fait [16, ch. I, §1,2, théorème 2.1]

$$\text{l'ensemble } \{S_A^m : (A, m)\in\mathscr{A}\} \text{ engendre le groupe métaplectique Mp,} \tag{2.19}$$

et la projection naturelle

$$\pi:\mathrm{Mp}\ni S\mapsto s\in\mathrm{Sp}$$

est alors caractérisée par [16, formule (1.11)]

$$(x, y)=\pi(S_A^m)(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} y=(\partial A/\partial x)(x, x'), \\ y'=-(\partial A/\partial x')(x, x'), \end{cases} \tag{2.20}$$

où $\partial A/\partial x$ (resp. $\partial A/\partial x'$) est le gradient de A en x (resp. en x'). De (2.20) on déduit en particulier

$$\pi(F)=J, \qquad \pi(M_L^m)=m_L, \qquad \pi(V_P)=v_P. \tag{2.21}$$

Explicitant (2.19) on voit que [16, §2,4, remarque 4.1, p. 38]

pour $S\in\mathrm{Mp}$ il existe $(A, m)\in\mathscr{A}$ tel que $S=S_A^m$ si et seulement si $\pi(S)l_0\cap l_0=\{0\}$, (2.22)

d'où il résulte immédiatement, vu (2.7), la propriété suivante qui précise (2.19):

pour tout $S\in\mathrm{Mp}$ il existe (A, m) et (A', m') dans $\mathscr{A}$ tels que $S=S_A^m S_{A'}^{m'}$. (2.23)

Cette factorisation de $S\in\mathrm{Mp}$ en deux automorphismes n'est évidemment pas unique, comme le montre l'exemple $S=I$. Toutefois [16, §2,8, formule (8.6)]

$$S_A^m=S_{A'}^{m'} \text{ si et seulement si } A=A' \text{ et } m\equiv m', \bmod 4. \tag{2.24}$$

Sp est homéomorphe au produit $\mathrm{U}(n)\times\mathbb{R}^{n(n+1)}$, $\mathrm{U}(n)$ le groupe unitaire, donc $\pi_1(\mathrm{Sp})=(\mathbb{Z}, +)$, et il existe donc pour $q=1, 2, \ldots, +\infty$ un revêtement connexe (unique) Sp_q de Sp, d'ordre q, et [16, ch. I, §2,3, théorème 3]

$$\mathrm{Sp}_q \text{ agit transitivement sur } \Lambda_{2q}, \tag{2.25}$$

$$(\alpha S_q)l_{2q}=\beta^2(S_q l_{2q})=S_q(\beta^2 l_{2q}), \tag{2.26}$$

pour tous $(S_q, l_{2q})\in\mathrm{Sp}_q\times\Lambda_{2q}$, α (resp. β) étant le générateur de $\pi_1(\mathrm{Sp})$ [resp. $\pi_1(\Lambda)$] dont l'image naturelle dans $\mathbb{Z}$ est $+1$. En particulier

$$\mathrm{Mp} \text{ agit transitivement sur } \Lambda_4. \tag{2.27}$$

C'est cette action (2.27), caractérisée par (2.26), que nous appellons *géométrie métaplectique*.

3. Définition et propriétés de l'indice μ_l

Vu (2.23), tout $S\in\mathrm{Mp}$ peut s'écrire comme le produit de deux opérateurs (2.12); cette décomposition n'est certainement pas unique, mais nous étalissons dans le théorème 3.1 une relation entre les couples $((A, m), (A', m'))$ rendant la décomposition de S possible; une conséquence essentielle de ce théorème est alors le théorème 3.2.

Commençons par rappeller le résultat suivant [2, ch. III, §9], qui précise le théorème habituel de la phase stationnaire:

> Soit R une matrice réelle, symétrique et inversible, d'ordre $p \geqslant 1$, et $a \in C^\infty(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+^*)$ telle que $a(\cdot, k) \neq 0$ pour tout $k > 0$, et
>
> (1) $a(\cdot, k) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^p)$ pour tout $k > 0$,
>
> (2) il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ on ait $|D_x^\alpha D_k^\gamma a(x, k)| = O(k^{m-\gamma})$ pour $k \to +\infty$, uniformément en $x \in \mathbb{R}^p$.
>
> Alors, l'intégrale
>
> $$(3) \quad I_{R,a}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\tfrac{1}{2} ik\langle Rx, x\rangle) a(x, k)\, dx$$
>
> satisfait
>
> $$(4) \quad I_{R,a}(k) \sim \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{p/2} |\det(R)|^{-1/2} (e^{i\pi/4})^{\operatorname{sign}(R)} a(0, k)$$
>
> pour $k \to +\infty$, où $\operatorname{sign}(R)$ est la signature de R. (3.1)

Dans toute la suite de ce paragraphe f désignera la fonction

$$f(x) = \exp(-|x|^2/2), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

et on posera, pour $k > 0$, $f_k(x) = f(x\sqrt{k})$. On rappelle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \pi^{n/2}. \tag{3.3}$$

Les deux lemmes suivants sont essentiels pour la démonstration du théorème 3.1.

Lemme 3.1. *Soient (A, m) et (A', m') dans $\mathscr{A}$, avec $A = (P, L, Q)$, $A' = (P', L', Q')$. Posons $\mu = 2m - n$, $\mu' = 2m' - n$, et $r = \operatorname{rang}(P' + Q)$, $s = \operatorname{sign}(P' + Q)$. Il existe $C = C(A; A') > 0$ telle que*

$$S_A^m S_{A'}^{m'} f_k(0) \sim Ck^{-r/2} (e^{i\pi/4})^{\mu + \mu' + s}$$

pour $k \to \infty$.

Lemme 3.2. *Pour toute matrice réelle, symétrique et inversible d'ordre n on a*

$$FV_{-R}F = (-1)^q V_{R^{-1}} M_{R^{-1}}^q F V_{R^{-1}},$$

où $q = \operatorname{Inert}(R)$ est l'inertie, c'est à dire le nombre de valeurs propres < 0, de R.

Nous utiliserons dans la démonstration de ces deux lemmes les notations simplifiées $e(x) = \exp(i\pi x/4)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $S = S_A^m$ et $S' = S_{A'}^{m'}$.

Preuve du lemme 3.1. Posons $R = P' + Q$. Utilisant successivement les relations (2.18b), (2.18c), (2.18d) on peut supposer $L' = I$; puisque l'on considère la valeur de $SS'f_k$ en $x = 0$ on peut aussi supposer $L = I$, $P = 0$. Il suffit donc de prouver que l'intégrale

$$I_R(k) = \int \exp(\tfrac{1}{2}ik\langle Rx, x\rangle)b(x, k)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.4}$$

$$b = F(V_{-Q'}f_k)\,, \tag{3.5}$$

vérifie

$$I_R(k) \sim Ck^{-r/2}e(s) \tag{3.6}$$

pour une constante $C > 0$.

Premier cas: $r = n$. Posant $a(x, k) = k^{n/2}b(x\sqrt{k}, k)$, (3.4) s'écrit

$$I_R(k) = \int \exp(\tfrac{1}{2}ik\langle Rx, x\rangle)a(x, k)\,\mathrm{d}x\,,$$

et il est clair que $a(\cdot, k) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k > 0$; en outre, vu (3.3) on a $|a(x, k)| \leqslant \pi^{n/2}$, et un calcul immédiat montre que l'on a pour $\gamma \geqslant 1$ et $k > 0$:

$$|D_x^\alpha D_k^\gamma a(x, k)| \leqslant k^{-2\gamma} \int |P_{\alpha,\gamma}(x)|\,f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

$P_{\alpha,\gamma}$ étant un polynôme, donc les conditions (3.1)(1) et (3.1)(2) sont satisfaites avec $m = 0$, $p = n$; on a donc, vu (3.1)(4),

$$I_R(k) \sim C(R)k^{-n/2}e(\operatorname{sign}(R)) \int \exp[(i/2k)\langle Q'x, x\rangle]f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

avec $C(R) = |\det(R)|^{-1/2}$; par l'inégalité $|e^{it} - 1| \leqslant |t|$, valide pour $t \in \mathbb{R}$, on a, vu (3.3),

$$\int \exp[(i/2k)\langle Q'x, x\rangle]f(x)\,\mathrm{d}x = \pi^{n/2} + O(1/k)\,, \tag{3.7}$$

c'est à dire

$$I_R(k) \sim (\tfrac{1}{2}\pi)^{n/2}|\det(R)|^{-1/2}e(s)k^{-n/2}\,,$$

ce qui établit (3.6) dans le cas $r = n$.

Deuxième cas: $0 < r < n$. Si $H \in O(n)$ on a

$$I_{{}^tHRH}(k) = \int \exp(\tfrac{1}{2}i\langle Rx, x\rangle)b({}^tHx, k)\,\mathrm{d}x$$

et, vu (2.18a),

$$b({}^tHx, k) = F(V_{-HQ'{}^tH}f_k)(x, k)\,;$$

on peut donc supposer R diagonale, et que les valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de R sont nulles si et seulement si $1\leqslant i\leqslant r$. Ecrivant $x=(x', x'')$, avec $x'=(x_1, ..., x_r)$, $x''=(x_{r+1}, ..., x_n)$, la relation (3.4) devient

$$I_R(k)=\int_{\mathbb{R}^r} \exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\langle R'x', x'\rangle)b(x', k)\,\mathrm{d}x' ,$$

où R' est la matrice diagonale de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_r$ et

$$b(x', k)=\int_{\mathbb{R}^{n-r}} b(x, k)\,\mathrm{d}x'' .$$

On vérifie immédiatement, comme dans le cas $r=n$, que la fonction $a(x', k)=k^{-r/2}b(x'\sqrt{k}, k)$ vérifie les conditions (3.1)(1) et (3.1)(2) avec $p=r$, $m=0$, d'où, vu (3.1)(4),

$$I_R(k)\sim Ck^{-r/2}e(\operatorname{sign}(R'))$$

pour une constante $C>0$ ne dépendant que de R et r, ce qui établit (3.6) dans ce cas.

Troisième cas: $r=0$. Alors $R=0$, et

$$I_R(k)=\int b(x, k)\,\mathrm{d}x=(2\pi)^{n/2} ,$$

vu la définition (3.5) de b, d'où (3.6).

Preuve du lemme 3.2. Soit $H\in\mathrm{O}(n)$ telle que $S=HR{}^{\mathrm{t}}H$ soit diagonale. On a, vu (2.18c),

$$FV_{-R}F=M_H(FV_{-S}F)M_H ,$$

et, vu successivement (2.18a,b,c,d),

$$M_H V_{S^{-1}} M_{S^{-1}} F V_{S^{-1}} M_{{}^{\mathrm{t}}H} = V_{R^{-1}} M_{R^{-1}} F V_{R^{-1}} ,$$

donc on peut supposer R diagonale. Soient $\epsilon_1\lambda_1, ..., \epsilon_n\lambda_n$ $(\lambda_j>0,\ \epsilon_j=\pm 1)$ les valeurs propres de R; on a alors

$$V_{-R}=\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon_1\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon_n\lambda_n} , \tag{3.8}$$

où $\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon\lambda}(u)=\exp(\mathrm{i}\epsilon\lambda u^2/2)$, $u\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, $\epsilon=\pm 1$. Notant $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier habituelle en une variable on a

$$\mathscr{F}(\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon\lambda})=e(\epsilon)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_{\mathrm{i}/\epsilon\lambda} . \tag{3.9}$$

Soit $h\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$; on note h^v la fonction $h^v(u)=h(-u)$ et $*$ le produit de convolution. Alors

$$\mathscr{F}(\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon\lambda}\mathscr{F}(h)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}(\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon\lambda}) * f^{v},$$

c'est à dire, vu (3.9) et la définition de $*$,

$$\mathscr{F}(\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon\lambda}\mathscr{F}(h))(u) = e(\epsilon)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_{\mathrm{i}\epsilon/\lambda}\mathscr{F}(\varphi_{\mathrm{i}\epsilon/\lambda}h)(u/\epsilon\lambda).$$

Définissant l'automorphisme $m^{\epsilon}_{\epsilon\lambda}$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par

$$m^{\epsilon}_{\epsilon\lambda}h(u) = e(1-\epsilon)\sqrt{\lambda}\, h(\epsilon\lambda),$$

cette formule s'écrit

$$\mathscr{F}(\varphi_{-\mathrm{i}\epsilon\lambda}\mathscr{F}(h)) = e(2\epsilon-1)\varphi_{\mathrm{i}\epsilon/\lambda}m^{\epsilon}_{1/\epsilon\lambda}\mathscr{F}(\varphi_{\mathrm{i}\epsilon/\lambda}). \tag{3.10}$$

Notant que l'on a

$$M^{q}_{R^{-1}} = m^{\epsilon_1}_{1/\epsilon_1\lambda_1}\otimes\cdots\otimes m^{\epsilon_n}_{1/\epsilon_n\lambda_n},$$

ainsi que

$$F = e(-n)(\mathscr{F}\otimes\cdots\otimes\mathscr{F}) \quad (n \text{ facteurs}),$$

(3.10) implique, vu (3.8),

$$FV_{-R}F = e(2(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n)-2n)V_{R^{-1}}M^{q}_{R^{-1}}FV_{R^{-1}},$$

d'où le lemme 3.2, puisque

$$2(\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n)-2n = 2(\operatorname{sign}(R)-n) = -2q.$$

Théorème 3.1. *Soient (A, m), (A', m'), (A'', m'') et (A''', m''') dans $\mathscr{A}$, $A = (P, L, Q)$, $A' = (P', L', Q')$, etc. On pose $\mu = 2m-n$, $\mu' = 2m'-n$, et ainsi de suite.*

(1) *Si $S^{m}_{A}S^{m'}_{A'} = S^{m''}_{A''}S^{m'''}_{A'''}$, alors $P'+Q$ et $P'''+Q''$ ont même rang, et*

$$\mu+\mu'+\operatorname{sign}(P'+Q) = \mu''+\mu'''+\operatorname{sign}(P'''+Q''), \quad \operatorname{mod} 8. \tag{i}$$

(2) *Il existe $(A, m)\in\mathscr{A}$ tel que $S^{m}_{A} = S^{m'}_{A'}S^{m''}_{A''}$ si et seulement si $P''+Q'$ est inversible, et on a dans ce cas*

$$\mu \equiv \mu'+\mu''+\operatorname{sign}(P''+Q'), \quad \operatorname{mod} 8. \tag{ii}$$

Nous utiliserons dans la démonstration du théorème 3.1 les mêmes notations que dans les lemmes 3.1, 3.2 et leurs démonstrations.

Preuve de (1). Vu le lemme 3.1 nous avons pour $k\to\infty$

$$SS'f_k(0) \sim Ck^{-r/2}e(\mu+\mu'+s),$$

$$S''S'''f_k(0) \sim C'k^{-r'/2}e(\mu''+\mu'''+s'),$$

C et C' étant des constants >0 et $r=\operatorname{rang}(P'+Q)$, $r'=\operatorname{rang}(P'''+Q'')$, $s=\operatorname{sign}(P'+Q)$, $s'=\operatorname{sign}(P'''+Q'')$, d'où $r=r'$ et $e(\mu+\mu'+s)=e(\mu''+\mu'''+s')$.

Preuve de (2). On a par définition de S

$$Sf_k(0)=e(\mu)\sqrt{|\det(L)|}\int \exp(\tfrac{1}{2}\mathrm{i}\langle Px,x\rangle)\,f(x\sqrt{k})\,\mathrm{d}x$$
$$=k^{-n/2}e(\mu)\sqrt{|\det(L)|}\int \exp[(\mathrm{i}/2k)\langle Px,x\rangle]\,f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

donc, vu (3.7),

$$Sf_k(0)\sim|\det(L)|\,(\pi/k)^{n/2}e(\mu)\,.$$

On a aussi, vu le lemme 3.1,

$$S'S''f_k(0)\sim C(1/k)^{r/2}e(\mu'+\mu''+s)\,,$$

avec $r=\operatorname{rang}(P''+Q')$, $s=\operatorname{sign}(P''+Q')$ et $C>0$; si alors $S=S'S''$ on doit avoir $r=n$ et $e(\mu)=e(\mu'+\mu''+s)$, donc $P''+Q'$ est inversible et la formule (ii) vérifiée. Si, inversement $R=P'+Q$ est inversible on a, vu la formule (2.16) et le lemme 3.2,

$$S'S''=(-1)^qV_{-P'}M_{L'}^{m'}(V_{R^{-1}}M_{R^{-1}}^{q}FV_{R^{-1}})M_{L''}^{m''}V_{-Q''}\,,$$

où $q=\operatorname{Inert}(R)=\operatorname{Inert}(P'+Q)$, c'est à dire, vu les formules (2.18),

$$S'S''=(-1)^qV_{-P}M_L^{m'+m''+q}FV_{-Q}\,,$$

avec

$$P=P'-{}^{t}L'R^{-1}L'\,,\qquad L={}^{t}L''^{-1}R^{-1}L'\,,\qquad Q=Q''-{}^{t}L''^{-1}R^{-1}L''^{-1}\,;$$

c'est à dire $S'S''=V_{-P}M_L^{m}FV_{-Q}$ où $m\equiv m'+m''-q$, mod 4. La formule (ii) du théorème en résulte immédiatement vu (2.24) puisque $n-2q=\operatorname{sign}(P'+Q)$.

On rappelle [voir (1.18)] que pour tout $l\in\Lambda$ la formule

$$\dot\sigma_l(S,S')=\text{classe de }\sigma(l,sl,ss'l)\,,\quad \text{mod } 8\,,$$

où $S\mapsto s$ désigne la projection naturelle $\mathrm{Mp}\to\mathrm{Sp}$, définit un cocycle sur Mp, c'est à dire que l'on a la relation

$$\dot\sigma_l(SS',S'')+\dot\sigma_l(SS')=\dot\sigma_l(S,S'S'')+\dot\sigma_l(S',S'')\,,\tag{3.11}$$

pour tous S, S', S'' dans Mp. Vu (2.23), la formule (i) du théorème 3.1 permet de définir

Définition. Soit $S=S_A^{m}S_{A'}^{m'}\in\mathrm{Mp}$. On note $\dot\mu_0(S)$ et on appelle indice de Maslov de S, la classe modulo 8 de l'entier $\mu+\mu'+\operatorname{sign}(P'+Q)$, si $A=(P,L,Q)$, $A'=(P',L',Q')$, $\mu=2m-n$, $\mu'=2m'-n$.

Vu la formule (ii) du même théorème on a alors

$$\dot{\mu}_0(S_A^m) = \text{classe de } (2m-n)\,, \quad \text{mod } 8\,, \tag{3.12}$$

donc $\dot{\mu}_0$ est localement constante sur $\{S_A^m : (A, m) \in \mathscr{A}\} \subset \mathrm{Mp}$. Posant, pour $(l, l', l'') \in \Lambda^3$, $\dot{\sigma}(l, l', l'') =$ classe de $\sigma(l, l', l'')$, modulo 8, on peut énoncer:

Théorème 3.2.

(1) *Soit* $l \in \Lambda$ *et* $S_0 \in \mathrm{Mp}$ *tel que* $l = s_0 l_0$, *où* $s_0 \in \mathrm{Sp}$ *est la projection de* S_0. *Pour* $S \in \mathrm{Mp}$, *l'expression* $\dot{\mu}_0(S_0^{-1} S S_0)$ *ne dépend que de* l *et* S; *la fonction* $\dot{\mu}_l : \mathrm{Mp} \to \mathbb{Z}_8$ *définie par*

$$\dot{\mu}_l(S) = \dot{\mu}_0(S_0^{-1} S S_0) \text{ est l'unique fonction } \mathrm{Mp} \to \mathbb{Z}_8\,,$$

ayant les deux propriétés suivantes:

$$\dot{\mu}_l(SS') - \dot{\mu}_l(S) - \dot{\mu}_l(S') = \dot{\sigma}_l(SS')\,, \tag{i}$$

qui s'énonce: $\dot{\sigma}_l$ *est un cobord de* $\dot{\mu}_l$;

l'application $(S, l') \mapsto \dot{\mu}_l(S) - \dot{\sigma}(sl, l, l')$ *est localement constante sur le sous-ensemble* $\{(S, l') : l \cap l' = l \cap l' = \{0\}\}$ *de* $\mathrm{Mp} \times \Lambda$; *donc* $\dot{\mu}_l$ *est localement constante sur le sous-ensemble* $E = \{S : sl \cap l = \{0\}\}$ *de* Mp. (ii)

(2) *La fonction* $\dot{\mu}_l$ *possède en outre les propriétés que voici:*

$$\dot{\mu}_l(S^{-1}) = -\dot{\mu}_l(S)\,, \quad \dot{\mu}_l(I) = \dot{0}\,, \tag{iiia,b}$$

$$\dot{\mu}_l(-S) = \dot{\mu}_l(S) + \dot{4}\,, \tag{iv}$$

$$\dot{\mu}_l(S) \text{ et } n\text{-}\dim(sl \cap l) \text{ ont même image dans } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,, \tag{v}$$

$$\dot{\mu}_l(S) - \dot{\mu}_{l'}(S) = \dot{\sigma}(sl, l, l') - \dot{\sigma}(sl, sl', l')\,. \tag{vi}$$

Preuve de (1). Montrons d'abord l'unicité d'une fonction vérifiant la propriété (ii). Si $\dot{\mu}_{l'}$ est une seconde telle fonction, $\dot{\nu}_l = \dot{\mu}_l - \dot{\mu}_{l'}$ vérifie

$$\dot{\nu}_l(SS') = \dot{\nu}_l(S) + \dot{\nu}_l(S')\,, \tag{3.13}$$

et est localement constante sur E; ou, vu (2.7), tout $S \in \mathrm{Mp}$ est le produit de deux éléments de E; (3.13) implique alors que $\dot{\nu}_l$ est localement constante sur Mp tout entier, et nulle.

Prouvons maintenant la formule (i).

Premier cas: $l = l_0$. Alors $\dot{\mu}_{l_0} = \dot{\mu}_0$; commençons par montrer que

$$\dot{\mu}_0(S_A^m S_{A'}^{m'}) = \dot{\mu}_0(S_A^m) + \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'}) + \dot{\sigma}(l_0, s_A l_0, s_A s_{A'} l_0)\,, \tag{3.14}$$

où s_A, $s_{A'}$ sont les projections de S_A^m, $S_{A'}^{m'}$, respectivement. Vu la formule (i) du théorème 3.1 et les propriétés (1.6) et (1.9) de σ il suffit de montrer que

$$\sigma(l_0, s_A^{-1} l_0, s_{A'} l_0) = -\operatorname{sign}(P' + Q) \tag{3.15}$$

si $A = (P, L, Q)$ et $A' = (P', L', Q')$. Ou vu (2.20) on a

$$(x, y) = S_A^{-1}(x', y') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = -Qx + Lx' , \\ y' = -{}^t Lx + Px' , \end{cases}$$

ainsi que

$$(x, y) = s_{A'}(x', y') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = P'x - {}^t L' x' , \\ y' = L'x + Q'x' , \end{cases}$$

donc

$$s_A^{-1} l_0 = \{(x, -Qx) : x \in \mathbb{R}^n\} , \qquad s_{A'} l_0 = \{(x, P'x) : x \in \mathbb{R}^n\} ,$$

d'où il résulte, vu (1.4), que $\sigma(l_0, s_A^{-1} l_0, s_{A'} l_0)$ est la signature de la forme quadratique $x \mapsto -\langle (P' + Q)x, x\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$, d'où (3.15) et (3.14).

Soit alors $S \in \mathrm{Sp}$; écrivant $S = S_A^m S_{A'}^{m'}$ la formule (3.15), vu la propriété de cocycle (1.5) de σ,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0(S) - \dot{\sigma}(sl_0, l_0, l) &= \dot{\mu}_0(S_A^m) + \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'}) \\ &\quad + \dot{\sigma}(l_0, s_A l_0, l) + \dot{\sigma}(s_A l_0, sl_0, l) \end{aligned} \tag{3.16}$$

pour tout $l \in \Lambda$; quitte à modifier légèrement S_A^m et $S_{A'}^{m'}$ on peut toujours supposer que $s_A l_0 \cap l = s_A l_0 \cap l_0 = s_A l_0 \cap sl_0 = \{0\}$, d'où (i) vu (1.8).

Prouvons maintenant que $\dot{\mu}_0$ vérifie (i). Il faut montrer que

$$\dot{\mu}_0(S) - \dot{\mu}_0(SS') + \dot{\mu}_0(S') = \dot{\sigma}(l_0, sl_0, ss'l_0) \tag{3.17}$$

pour tous $S, S' \in \mathrm{Mp}$; (3.14) l'établit lorsque $S = S_A^m$ et $S' = S_{A'}^{m'}$; supposons donc maintenant S quelconque et $S' = S_A^m$, et définissons une fonction $f_{A,m} : \mathrm{Mp} \mapsto \mathbb{Z}_8$ par

$$f_{A,m}(S) = \dot{\mu}_0(SS_A^m) - \dot{\mu}_0(S) - \dot{\sigma}(l_0, sl_0, ss_A l_0) ,$$

et choisissons $l \in \Lambda$; vu la propriété de cocycle de σ on a

$$\sigma(l_0, sl_0, ss_A l_0) = \sigma(l_0, sl_0, l) - \sigma(l_0, ss_A l_0, l) + \sigma(sl_0, ss_A l_0, l) ,$$

donc, vu l'antisymétrie (1.6) de σ, on peut écrire

$$f_{A,m}(S) = h_l(SS_A^m) - h_l(S) - \dot{\sigma}(sl_0, ss_A l_0, l) ,$$

avec $h_l(S) = \dot{\mu}_0(S) - \dot{\sigma}(sl_0, l_0, l)$. Prenant en particulier l tel que

$$sl_0 \cap l = ss_A l_0 \cap l = l_0 \cap l = \{0\}$$

(un tel choix de l est toujours possible; voir par exemple la remarque suivant le lemme 21.6.3, p. 330, dans la réf. [13]), h_l est constant dans un voisinage de S. Puisque par ailleurs

$$sl_0 \cap ss_A l_0 = l_0 \cap s_A l_0 = \{0\},$$

vu (2.22), l'application $S \mapsto \sigma(sl_0, ss_A l_0, l)$ est également constante, vu (1.8); par conséquent $f_{A,m}$ est localement constante, donc constante sur le connexe Mp. Prenant maintenant $S = S_{A'}^{m'}$ dans (3.13) on a

$$\begin{aligned} f_{A,m}(S_{A'}^{m'}) &= \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'} S_A^m) - \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'}) - \dot{\sigma}(l_0, sl_0, ss_A l_0) \\ &= \dot{\mu}_0(S_A^m), \end{aligned}$$

donc $f_{A,m}(S) = \mu_0(S_A^m)$ pour tout $S \in \mathrm{Mp}$, d'où (3.17) pour $S' = S_A^m$. Pour prouver (3.17) dans le cas général, posons $S' = S_A^m S_{A'}^{m'}$; par (3.17) dans le cas précédent on a

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0(SS') &= \dot{\mu}_0(SS_A^m) + \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'}) + \dot{\sigma}(l_0, ss_A l_0, ss' l_0) \\ &= \dot{\mu}_0(S) + \dot{\mu}_0(S_A^m) + \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'}) \\ &\quad + \dot{\sigma}(l_0, ss_A l_0, ss' l_0) + \dot{\sigma}(l_0, sl_0, ss_A l_0), \end{aligned}$$

c'est à dire, vu (1.5), (1.6) et (1.9), et puisque $s' = s_A s_{A'}$,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0(SS') &= \dot{\mu}_0(S) + \dot{\mu}_0(S_A^m) + \dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'}) \\ &\quad + \dot{\sigma}(l_0, s_A l_0, s_A s_{A'} l_0) + \dot{\sigma}(l_0, sl_0, ss' l_0), \end{aligned}$$

d'où (3.17) vu (3.14).

Remarque. Prenant $S = S' = I$, (3.17) implique immédiatement, vu l'antisymétrie de σ,

$$\dot{\mu}_0(I) = \dot{0}. \tag{3.18}$$

Deuxième cas: l quelconque. Soit $s_0 \in \mathrm{Sp}$ tel que $l = s_0 l_0$; il existe exactement deux éléments, S_0 et $-S_0$, se projettant en s_0. Puisque $S_0^{-1} S S_0 = (-S_0)^{-1} S(-S_0)$, l'expression $\dot{\mu}_0(S_0^{-1} S S_0)$ ne dépend donc pas du choix de l'élément de Mp se projettant en s_0. Soit un autre élément s_0' de Sp tel que $l = s_0' l_0$; alors $s_0' = s_0 h$ avec $h \in \mathrm{St}(l_0)$, le stabilisateur de l_0 dans Sp. Soit $H \in \mathrm{Mp}$ de projection h. Vu (3.17) et les relations $hl_0 = h^{-1} l_0 = l_0$ on a

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0(H^{-1} S_0^{-1} S S_0 H) &= \dot{\mu}_0(H^{-1}) + \mu_0(S_0^{-1} S S_0) + \dot{\mu}_0(H) \\ &\quad + \dot{\sigma}(l_0, l_0, h^{-1} s_0^{-1} s s_0 l_0) + \dot{\sigma}(l_0, s_0^{-1} s s_0 l_0, s_0^{-1} s s_0 l_0), \end{aligned}$$

donc, vu l'antisymétrie de σ,

$$\dot{\mu}_0(H^{-1} S_0^{-1} S S_0 H) = \dot{\mu}_0(H^{-1}) + \dot{\mu}_0(S_0^{-1} S S_0) + \dot{\mu}_0(H).$$

Vu (3.18) et (3.17) on a

$$\dot{\mu}_0(H^{-1}) + \dot{\mu}_0(H) = \dot{\mu}_0(I) = \dot{0},$$

donc

$$\dot{\mu}_0(H^{-1}S_0^{-1}SS_0H)=\dot{\mu}_0(S_0^{-1}SS_0)\ ,$$

ce qui montre que l'expression $\dot{\mu}_0(S_0^{-1}SS_0)$ ne dépend que de $l\in\Lambda$ et de $S\in\mathrm{Mp}$; il est donc légitime de la noter $\dot{\mu}_l(S)$. La propriété (ii) résulte alors immédiatement de cette propriété pour $\dot{\mu}_0=\dot{\mu}_{l_0}$ et de (1.8); reste à montrer que

$$\dot{\mu}_l(S)-\dot{\mu}_l(SS')+\dot{\mu}_l(S')=\dot{\sigma}(l,sl,ss'l) \tag{3.19}$$

pour tous S, S' dans Mp. On a, vu (3.17),

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_l(SS')&=\dot{\mu}_0((S_0^{-1}SS_0)(S_0^{-1}S'S_0))\\&=\dot{\mu}_0(S_0^{-1}SS_0)+\dot{\mu}_0(S_0^{-1}S'S_0)+\dot{\sigma}(l_0,s_0^{-1}ss_0l_0,s_0^{-1}ss's_0l_0)\ ,\end{aligned}$$

c'est à dire, vu (1.9) et puisque $l=s_0l_0$,

$$\dot{\mu}_l(SS')=\dot{\mu}_l(S)+\dot{\mu}_l(S')+\dot{\sigma}(l,sl,ss'l)\ ,$$

qui est (3.19).

Preuve de (2). La propriété (iiib) résulte immédiatement de (3.18); écrivant $SS^{-1}=I$ la propriété (iiia) en découle, vu (3.17) et l'antisymétrie de σ. Il suffit de prouver la propriété (iv) pour $l=l_0$; on a

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_l(-S)&=\dot{\mu}_0(-S_0^{-1}SS_0)\\&=\dot{\mu}_0(S_0^{-1}SS_0)+\dot{4}\\&=\dot{\mu}_l(S)+\dot{4}\ .\end{aligned}$$

Soit donc $S=S_A^mS_{A'}^{m'}\in\mathrm{Mp}$; posons $m''=m+2$; alors $-S=S_A^{m''}S_{A'}^{m'}$ et on a, vu (3.17) et (3.12),

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_0(-S)&=\dot{\mu}_0(S_A^{m''})+\dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'})+\dot{\sigma}(l_0,s_Al_0,s_As_{A'}l_0)\\&=[2(m''+m-n)]^{\cdot}+\dot{\sigma}(l_l,s_Al_0,s_As_{A'}l_0)\\&=\dot{\mu}_0(S_A^m)+\dot{4}+\dot{\mu}_0(S_{SA'}^{m'})+\dot{\sigma}(l_0,s_Al_0,s_As_{A'}l_0)\\&=\dot{\mu}_0(S)+\dot{4}\ ,\end{aligned}$$

où $[x]^{\cdot}$ désigne la classe de $x\in\mathbb{Z}$, modulo 8, $s_{A'}$ la projection de $S_{A'}^{m'}$ et s_A la projection de $S_A^m=-S_A^{m''}$.

Prouvons (v). Écrivant de nouveau

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_0(S)&=\dot{\mu}_0(S_A^mS_{A'}^{m'})\\&=\dot{\mu}_0(S_A^m)+\dot{\mu}_0(S_{A'}^{m'})+\dot{\sigma}(l_0,s_Al_0,s_As_{A'}l_0)\\&=[2(m+m'-n)]^{\cdot}+\dot{\sigma}(l_0,s_Al_0,s_As_{A'}l_0)\ ,\end{aligned}$$

$\dot{\mu}_0(S)$ et $\dot{\sigma}(l_0, s_A l_0, s_A s_{A'} l_0)$ ont la même image dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; or vu (1.7) on a, s étant la projection de S,

$$\sigma(l_0, s_A l_0, s_A s_{A'} l_0) \equiv n + \dim(l_0 \cap s_A l_0) + \dim(s_A l_0 \cap s_A s_{A'} l_0) + \dim(l_0 \cap s l_0)$$
$$\equiv n + \dim(l_0 \cap s l_0)\,, \quad \bmod 2\,,$$

ce qui prouve (v) si $l = l_0$; le cas général en résulte immédiatement notant que $\dim(s_0^{-1} s s_0 l_0 \cap l_0) = \dim(sl \cap l)$.

Pour prouver (vi), posons $l = s_0 l_0$, $l' = s'_0 l_0$, et choisissons $S_1 \in \mathrm{Mp}$ de projection $s_1 = s_0 s_0'^{-1} \in \mathrm{Sp}$; donc $l = s_1 l'$ et on a, puisque $\dot{\mu}_l(S) = \dot{\mu}_{l'}(S_1^{-1} S S_1)$,

$$\dot{\mu}_l(S) = \dot{\mu}_{l'}(S_1^{-1}) + \dot{\mu}_{l'}(SS_1) + \dot{\sigma}(l', s_1^{-1} l', s_1^{-1} s s_1 l')$$
$$= \dot{\mu}_{l'}(S_1^{-1}) + \dot{\mu}_{l'}(S) + \dot{\mu}_{l'}(S_1) + \dot{\sigma}(l', sl', ss_1 l') + \dot{\sigma}(l', s_1^{-1} l', s_1^{-1} s s_1 l')\,,$$

d'où (vi), vu (iii) et les propriétés (1.6) et (1.9) de σ.

4. Construction de l'indice de Maslov sur Λ_4

Nous notons comme précédemment $\dot{\sigma}(l, l', l'')$ la classe modulo 8 de $\sigma(l, l', l'')$, σ étant le cocycle de Demazure–Kashiwara. L'élément générique de Λ_4, revêtement d'ordre quatre de $\Lambda = \Lambda(n)$, sera noté $\hat{l}$ et sa projection sur Λ, $\pi(\hat{l}) = l$. Vu la définition (2.27) de la géométrie métaplectique, Mp agit transitivement sur Λ_4. Si $\hat{l} \in \Lambda_4$ nous noterons $\mathrm{St}(\hat{l})$ le stabilisateur de $\hat{l}$ dans Mp: c'est le sous-groupe de Mp consistant des S tels que $S\hat{l} = \hat{l}$. Un résultat essentiel est alors:

Lemme 4.1.
(1) $\mathrm{St}(\hat{l})$ *est homéomorphe à la composante connexe de* $\mathrm{St}(l) \subset \mathrm{Sp}$.
(2) $\dot{\mu}_l(S) = 0$ *pour tout* $S \in \mathrm{St}(l)$.

Preuve. La propriété (1) implique la propriété (2) vu (ii) et (iiib) dans le théorème 3.2. Montrons donc la propriété (1). Soit l la projection de $\hat{l} \in \Lambda_4$ et $\mathrm{St}(l)$ son stabilisateur dans Sp. Vu le lemme 2.1(3), $\mathrm{St}(l)$ a deux composantes connexes, $\mathrm{St}^+(l)$ et $\mathrm{St}^-(l)$, $\mathrm{St}^+(l)$ étant la composante de l'élément neutre. Soit $\mathrm{St}_2(l)$ le sous-groupe de Mp, image réciproque de $\mathrm{St}(l)$ par la projection $\mathrm{Mp} \to \mathrm{Sp}$. Le stabilisateur $\mathrm{St}(l)$ est fermé dans $\mathrm{St}_2(l)$, et vu (2.28) son complémentaire dans $\mathrm{St}_2(l)$ est l'ensemble

$$\mathrm{St}'(l) = \{S : S(\beta^j \hat{l}) = \beta^k \hat{l}, j \neq k, \bmod 4\}\,,$$

où β est un générateur de $\pi_1(\Lambda)$, donc $\mathrm{St}'(l)$ est également fermé dans $\mathrm{St}_2(l)$, donc $\mathrm{St}(\hat{l})$ est ouvert et fermé dans $\mathrm{St}_2(l)$. La projection d'un revêtement étant un homéomorphisme local, il en résulte que

$$\pi(\mathrm{St}(l)) \text{ est ouvert et fermé dans } \mathrm{St}(l) . \tag{4.1}$$

Posons $E^{\pm}=\pi(\mathrm{St}(l))\cap\mathrm{St}^{\pm}(l)$; vu (4.1), E^+ et E^- sont ouverts et fermés dans $\mathrm{St}(l)$, et par conséquent aussi dans les connexes $\mathrm{St}^+(l)$, $\mathrm{St}^-(l)$; donc

$$E^+=\mathrm{St}^+(l) \text{ ou } \emptyset , \qquad E^-=\mathrm{St}^-(l) \text{ ou } \emptyset . \tag{4.2}$$

Or $I\in\mathrm{St}(l)$, donc $E^+=\mathrm{St}(l)$. Par ailleurs on n'a pas $E^-=\mathrm{St}^-(l)$, car dans ce cas on aurait $\pi(\mathrm{St}(\hat{l}))=\mathrm{St}(l)$ donc $\mathrm{St}_2(l)=\{S: \pm S\in\mathrm{St}(\hat{l})\}$; or vu (2.27) et (2.28) il n'existe pas d'élément $S\in\mathrm{Mp}$ tel que $\pm S\hat{l}=\hat{l}$. On a donc $E^-=\emptyset$, d'où $\pi(\mathrm{St}(\hat{l}))=\mathrm{St}^+(l)$, et la restriction de π à $\mathrm{St}(\hat{l})$ est injective donc $\mathrm{St}(\hat{l})$ est homéomorphe au connexe $\mathrm{St}(l)$.

Remarque. Le lemme 4.1 peut aussi se déduire du lemme 2.1(3) et de la réf. [4, théorème 3.1].

Soit $(\hat{l}, \hat{l}')$ une paire d'éléments de Λ_4 se projettant en $(l, l')\in\Lambda^2$. Vu la transitivité (2.25) de l'action de Mp sur Λ_4, il existe $S\in\mathrm{Mp}$ tel que $\hat{l}'=S\hat{l}$, et on a alors $l'=sl$, où $s\in\mathrm{Sp}$ est la projection de S. Soit maintenant S' un autre élément de Mp tel que $\hat{l}'=S'\hat{l}$; on a alors $S'=SH$ avec $H\in\mathrm{St}(\hat{l})$. Par le lemme 4.1 et vu la propriété de cobord de $\dot{\sigma}_l$ [théorème 3.2; formule (3.19)], on a

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_l(S') &= \dot{\mu}_l(S)+\dot{\mu}_l(H)+\dot{\sigma}(l, sl, shl) \\ &= \dot{\mu}_l(S)+\dot{\sigma}(l, sl, shl) , \end{aligned}$$

$h\in\mathrm{Sp}$ étant le projeté de H; or $\pi(\mathrm{St}(\hat{l}))\subset\mathrm{St}(l)$, donc, par l'antisymétrie du cocycle de Demazure-Kashiwara,

$$\dot{\mu}_l(S')=\dot{\mu}_l(S) ,$$

donc $\dot{\mu}_l(S)$ ne dépend que de $(\hat{l}, \hat{l}')$; nous noterons

$$\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}')=\dot{\mu}_l(S) \quad \text{si } \hat{l}'=S\hat{l}, \tag{4.3}$$

et appellerons la fonction

$$\dot{\mu}: \Lambda_4^2 \ni (\hat{l}, \hat{l}') \mapsto \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}')\in\mathbb{Z}_8$$

définie par (4.3) "*indice de Maslov sur Λ_4*". Le théorème suivant permet d'identifier $\dot{\mu}$ avec l'indice de Maslov défini dans la réf. [9, ch. II, §4].

Théorème 4.1. *L'indice de Maslov $\dot{\mu}$ est l'unique fonction $\Lambda_4\times\Lambda_4\to\mathbb{Z}_8$ qui soit localement constante sur $\{(\hat{l}, \hat{l}'): l\cap l'=\{0\}\}\subset\Lambda_4\times\Lambda_4$ et qui satisfasse la relation*

$$\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}')-\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}'')+\dot{\mu}(\hat{l}', \hat{l}'')=\dot{\sigma}(l, l', l'') \tag{4.4}$$

pour tous $(\hat{l}, \hat{l}', \hat{l}'') \in \Lambda_4 \times \Lambda_4 \times \Lambda_4$ *se projettant en* $(l, l', l'') \in \Lambda \times \Lambda \times \Lambda$.

Preuve. Montrons d'abord que (4.4) est vérifiée par l'indice de Maslov. Soient S et S' dans Mp tels que $\hat{l}' = S\hat{l}$ et $\hat{l}'' = S'\hat{l}'$, donc $\hat{l}'' = S'S\hat{l}$. Vu la propriété (i) du théorème 3.2 de $\dot{\mu}_l$ et la définition (1.18) du cocycle $\dot{\sigma}_l$ on a

$$\dot{\mu}_l(S'S) = \dot{\mu}_l(S') + \dot{\mu}_l(S) + \dot{\sigma}(l, s'l, s'sl) \tag{4.5}$$

et vu (vi) dans le théorème 3.2,

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_{l'}(S') &= \dot{\mu}_l(S') - \dot{\sigma}(s'l, l, l') + \dot{\sigma}(s'l, s'l', l') \\ &= \dot{\mu}_l(S') - \dot{\sigma}(s'l, l, l') + \dot{\sigma}(s'l, l'', l') . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Or

$$\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') = \dot{\mu}_l(S) , \qquad \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}'') = \dot{\mu}_l(S'S) , \qquad \dot{\mu}(\hat{l}', \hat{l}'') = \dot{\mu}_l(S') ;$$

donc (4.5) et (4.6) donnent

$$\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') - \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}'') + \dot{\mu}(\hat{l}', \hat{l}'') = \dot{\sigma}(l, s'l, l'') + \dot{\sigma}(s'l, l, l') - \dot{\sigma}(s'l, l'', l')$$

d'où (4.4) vu la propriété de cocycle et l'antisymétrie de σ.

Vu le théorème 3.1 (1), $\dot{\mu}_l$ est localement constante sur $\{S \in \mathrm{Mp} : sl \cap l = \{0\}\}$, il en résulte immédiatement, vu la transitivité de l'action de Sp sur Λ, que $\dot{\mu}$ est localement constante sur le sous-ensemble $F = \{(\hat{l}, \hat{l}') : l \cap l' = \{0\}\}$ de $\Lambda_4 \times \Lambda_4$. Montrons que c'est l'unique fonction vérifiant (4.4) ayant cette propriété. Si $\dot{\mu}'$ est une seconde fonction localement constante sur F, vérifiant (4.4), alors $\dot{\nu} = \dot{\mu} - \dot{\mu}'$ est localement constante sur F et on a

$$\dot{\nu}(\hat{l}, \hat{l}'') = \dot{\nu}(\hat{l}, \hat{l}') + \dot{\nu}(\hat{l}', \hat{l}'') \tag{4.7}$$

pour tous $\hat{l}, \hat{l}', \hat{l}''$ dans Λ_4; comme on peut toujours choisir $\hat{l}'$ tel que $l \cap l' = l'' \cap l' = \{0\}$, il résulte de (4.7) que $\dot{\nu}$ est localement constante sur $\Lambda_4 \times \Lambda_4$ tout entier, donc constante puisque Λ_4 est connexe; toujours vu (4.7) cette constante est 0, d'où $\dot{\mu} = \dot{\mu}'$.

Le théorème suivant est essentiel:

Théorème 4.2. L'indice de Maslov $\dot{\mu}$ possède les propriétés suivantes:

$$\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') + \dot{\mu}(\hat{l}', \hat{l}) = \dot{0} , \qquad \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}) = \dot{0} , \tag{ia,b}$$

$$\dot{\mu}(S\hat{l}, S\hat{l}') = \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') , \quad \forall S \in \mathrm{Mp} , \tag{ii}$$

$$\dot{\mu}(\beta^r \hat{l}, \beta^{r'} \hat{l}') = \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') + [2(r - r')]^{\cdot} , \tag{iii}$$

pour tous $(r, r') \in \mathbb{Z}^2$, β *étant le générateur de* $\pi_1(\Lambda)$ *dont l'image dans* $\mathbb{Z}$ *est* $+1$;

$$\dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') \equiv n - \dim(l \cap l') , \quad \bmod 2 . \tag{iv}$$

Preuve. (i) résulte immédiatement de la propriété (iii) du théorème 3.2(2) de $\dot{\mu}_l$. Prouvons (ii). Vu (1.9), la fonction $\dot{\mu}':\Lambda_4\times\Lambda_4\to\mathbb{Z}_8$ définie par $\dot{\mu}'(\hat{l},\hat{l}')=\dot{\mu}(S\hat{l},S\hat{l}')$ vérifie la relation (4.4); la condition $l\cap l'=\{0\}$ est équivalente à la condition $sl\cap sl'=\{0\}$ pour tout $s\in\mathrm{Sp}$, donc $\dot{\mu}'$ est localement constante sur $\{(\hat{l},\hat{l}'):l\cap l'=\{0\}\}$, donc identique à $\dot{\mu}$ vu le théorème 4.1, d'où (ii). Le même argument, remplaçant S par β^r, montre que

$$\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\beta^r\hat{l}')=\dot{\mu}(\hat{l},\hat{l}')\,, \tag{4.8}$$

ce qui établit (iii) dans le cas $r=r'$. Vu la propriété (4.4) de $\dot{\mu}$ on a, puisque $\pi(\beta^r\hat{l})=\pi(\hat{l})=l$, $\forall r\in\mathbb{Z}$,

$$\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\hat{l})-\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\beta^{2r}\hat{l})+\dot{\mu}(\hat{l},\beta^{2r}\hat{l})=0\,. \tag{4.9}$$

Or, vu (2.27), $\beta^{2r}\hat{l}=(-I)^r\hat{l}$, donc $\dot{\mu}(\hat{l},\beta^{2r}\hat{l})=4r$ vu la formule (iv) dans le théorème 3.2(2). Vu (4.8), (4.9) s'écrit alors

$$\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\hat{l})-\dot{\mu}(\hat{l},\beta^r\hat{l})=[4r]^{\cdot}\,,$$

c'est à dire, vu la propriété (ib) de $\dot{\mu}$,

$$\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\hat{l})=[2r]^{\cdot}\,. \tag{4.10}$$

Utilisant encore une fois (4.4) on a

$$\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\hat{l}')-\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\hat{l})+\dot{\mu}(\hat{l}',\hat{l})=\dot{0}\,,$$

donc, vu (4.10) et (i),

$$\dot{\mu}(\beta^r\hat{l},\hat{l}')=\dot{\mu}(\hat{l},\hat{l}')+[2r]^{\cdot}\,,$$

et (iii) en résulte vu (4.8) et (ia).

5. Géometrie métaplectique

L'objet de ce paragraphe est de donner une description très explicite de l'action (2.27) de Mp sur Λ_4. Cette description utilise l'indice de Maslov et ses propriétés.

Soit $l\in\Lambda$ et $S\in\mathrm{Mp}$. Vu la formule (iv) du théorème 3.2, l'image de $\mu_l(S)$ dans $\mathbb{Z}_4=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ne dépend que de l et de la projection $s\in\mathrm{Sp}$ de S; nous noterons cette image $\mu_l\langle s\rangle$.

Théorème 5.1.

(1) *Pour chaque* $l\in\Lambda$ *l'application*

$$\mathrm{Mp}\ni S\to(s,\dot{\mu}_l(S))\in\mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}_8 \tag{i}$$

est une injection; cette injection est une bijection

$$\varphi_l : \mathrm{Mp} \to \{(s, \dot{\mu}) : \mu \in \dot{\mu}_l \langle s \rangle\} . \qquad \text{(ii)}$$

(2) *La restriction*

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_l : &\{S : sl \cap l = \{0\}\} \\ &\to \{(s, \dot{\mu}) : sl \cap l = \{0\} , \mu \in \dot{\mu}_l \langle s \rangle\}\end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

de cette bijection est un homéomorphisme lorsque $\mathbb{Z}_8$ *est muni de la topologie discrète.*

Preuve. L'application (ii) est évidemment surjective. L'application (i) est injective car si $(s, \dot{\mu}_l(S)) = (s', \dot{\mu}_l(S'))$ alors $s = s'$ donc $S = \pm S'$, d'où $S = S'$ vu (iv) dans le théorème 3.2. Pour prouver (2) il suffit de remarquer que vu (ii) dans le même théorème $\dot{\mu}_l$ est localement constante sur $\{S : sl \cap l = \{0\}\}$, c'est à dire continue sur cet ensemble lorsque $\mathbb{Z}_8$ est muni de la topologie discrète.

Considérons sur $\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8$ la loi de composition interne définie par

$$(s, \dot{\mu})(s', \dot{\mu}') = (ss', \dot{\mu} + \dot{\mu}' + \dot{\sigma}_l(s, s')) . \qquad (5.1)$$

On vérifie immédiatement, utilisant les propriétés du cocycle $\dot{\sigma}_l$, que la loi (5.1) munit $\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8$ d'une structure de groupe d'élément neutre $(I, 0)$, l'inverse de $(s, \dot{\mu})$ étant $(s^{-1}, -\dot{\mu})$. Le résultat suivant identifie Mp avec un sous-groupe de $\mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8$ muni de la loi (5.1).

Théorème 5.2.

(1) *Pour chaque* $l \in \Lambda$ *l'ensemble*

(i) $\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l = \{(s, \dot{\mu}) \in \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 : \mu \in \dot{\mu}_l \langle s \rangle\}$ *peut être muni d'une structure de groupe topologique pour laquelle la bijection* φ_l *est un isomorphisme de groupes topologiques;*

(2) *La loi de composition du groupe* $\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l$ *est* (5.1), *c'est à dire*

(ii) $(s, \dot{\mu})(s', \dot{\mu}') = (ss', \dot{\mu} + \dot{\mu}' + \dot{\sigma}(l, sl, ss'l)$ *avec* $\mu \in \dot{\mu}_l \langle S \rangle$, $\mu' \in \dot{\mu}_l \langle s' \rangle$, $\mu + \mu' + \sigma(l, sl, ss'l) \in \dot{\mu}_l \langle ss' \rangle$;

(3) *la topologie de* $\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l$ *est caractérisée par les conditions*

(iii) *pour chaque* $l' \in \Lambda$ *l'application* $\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l \ni (s, \dot{\mu}) \mapsto \dot{\mu} - \dot{\sigma}(sl, l, l') \in \mathbb{Z}_8$ *est localement constante sur l'ensemble*

$$\{(s, \dot{\mu}) : l \cap l' = sl \cap l' = \{0\}\} ,$$

(iv) *la projection*

$$\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l \ni (s, \dot{\mu}) \mapsto s \in \mathrm{Sp}$$

est continue.

Preuve. Vu le théorème 5.1 (1) l'image de Mp par φ_l est $\langle \mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}_8\rangle_l$; munissons cet ensemble de la topologie transportée par φ_l; (1) et (2) résultent alors immédiatement de la définition (5.1) de la loi de composition de $\mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}_8$. La propriété (3) est évidente vu (ii) dans le théorème 3.2.

Remarque. Soient deux éléments l et l' de Λ. Vu le (1) du théorème précédent on voit que $\langle \mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}_8\rangle_l$ et $\langle \mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}_8\rangle_{l'}$ sont des groupes topologiques isomorphes et que l'ensemble des homéomorphismes φ_l est un système de cartes locales de Mp dont les raccordements sont donnés, vu (vi), théorème 3.2, par les formules

$$\dot{\mu}_l(S)-\dot{\mu}_{l'}(S)=\dot{\sigma}(sl, l, l')-\dot{\sigma}(sl, sl', l')\ . \tag{5.2}$$

De manière similaire on peut identifier Λ_4 avec un sous-ensemble de $\Lambda\times\mathbb{Z}_8$: Pour $l\in\Lambda$ on note Λ_l l'ensemble des plans lagrangiens transverses à l, $\Lambda_l=\{l'\in\Lambda : l\cap l'=\{0\}\}$. Il est facile de voir que cet ensemble est ouvert (cf. par exemple la réf. [13, §21.6]).

Théorème 5.3.
(1) *Pour chaque $l'\in\Lambda_4$ l'application*

$$\Lambda_4\ni\tilde{l}\mapsto(l, \dot{\mu}(\tilde{l}, \tilde{l}'))\in\Lambda\times\mathbb{Z}_8 \tag{i}$$

est une injection; cette injection est une bijection

$$\psi_{\tilde{l}'}:\Lambda_4\to\{(l, \dot{\lambda}):\lambda\equiv n-\dim(l\cap l'), \bmod 2\}\ . \tag{ii}$$

La restriction

$$\tilde{\psi}_{\tilde{l}'}:\{\tilde{l}: l\cap l'=\{0\}\}\to\Lambda_{l'} \tag{iii}$$

est un homéomorphisme lorsque $\mathbb{Z}_8$ est muni de la topologie discrète.

Preuve. Si $(l, \dot{\mu}(\tilde{l}, \tilde{l}'))=(l'', \dot{\mu}(\tilde{l}'', \tilde{l}'))$ alors $l=l''$ et il existe donc $r\in\mathbb{Z}$ tel que $l=\beta^r l''$, où β est le générateur de $\pi_1(\Lambda)$ dont l'image dans $\mathbb{Z}$ est $+1$. On en déduit, vu la propriété (iii) du théorème 3.2, de l'indice de Maslov, que $r=0$, mod 4, donc $\tilde{l}=\tilde{l}''$ vu (2.28), donc (i) est bien injective. Vu (iv) dans le théorème 4.2, c'est une injection dans $\{(l, \dot{\lambda}):\lambda\equiv n-\dim(l\cap l'), \bmod 2\}$, et vu (iii) dans le même théorème, c'est une surjection, donc $\psi_{\tilde{l}'}$ est bijective. Pour prouver (2) il suffit de remarquer que vu le théorème 4.1, μ est localement constante sur $\{\tilde{l}\in\Lambda_4 : l\in\Lambda_{l'}\}$, donc continue lorsque $\mathbb{Z}_8$ est muni de la topologie discrète.

Introduisant la notation

$$\langle\Lambda\times\mathbb{Z}_8\rangle_{l'}=\{(l, \dot{\lambda}):\lambda\equiv n-\dim(l\cap l'), \bmod 2\}\ , \tag{5.3}$$

et munissant $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'}$ de la topologie transportée par la bijection $\psi_{l'}$, le théorème 5.3 permet d'identifier Λ_4 et $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'}$. Plus précisément

Théorème 5.4.

(1) *Pour chaque $l' \in \Lambda$ l'ensemble $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'}$ défini par (5.3) peut être muni d'une topologie faisant de lui un espace topologique pour lequel $\psi_{l'}$ soit un homéomorphisme; l'ensemble de ces homéomorphismes constitue alors un système de cartes locales de Λ_4 dont les raccordements sont donnés par les formules*

$$\mu(\hat{l}, \hat{l}') - \mu(\hat{l}, \hat{l}'') = \dot{\sigma}(l, l', l'') - \mu(\hat{l}', \hat{l}'') . \tag{i}$$

(2) *Cette topologie est caractérisée par les conditions que voici:*

pour tout $l'' \in \Lambda$ l'application $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'} \ni (l, \lambda) \to \dot{\lambda} - \dot{\sigma}(l, l', l'') \in \mathbb{Z}_8$ est localement constant sur $\{\hat{l} : l \in \Lambda_{l''}\}$, (*ii*)

la projection $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'} \ni (l, \dot{\lambda}) \mapsto l \in \Lambda$ est continue. (*iii*)

Preuve. Immédiate vu le théorème 5.3, le théorème 4.1 [formule (4.4)] et la propriété (1.8) de σ.

Nous allons utiliser les théorèmes 5.2 et 5.4 pour expliciter l'action de Mp sur Λ_4, c'est à dire de $\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l$ sur $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_l$. Nous aurons besoin du lemme suivant qui complète les propriétés de l'indice de Maslov.

Lemme. *Pour tous $(S, \hat{l}, \hat{l}') \in \mathrm{Mp} \times \Lambda_4 \times \Lambda_4$ on a la relation*

$$\dot{\mu}(S\hat{l}, \hat{l}') = \dot{\mu}_{l'}(S) + \mu(\hat{l}, \hat{l}') + \dot{\sigma}(l', sl', sl) . \tag{5.4}$$

Preuve. Vu la définition (4.3) de l'indice de Maslov on a $\dot{\mu}_{l'}(S) = \dot{\mu}(\hat{l}', S\hat{l}')$, donc il suffit de démontrer que

$$\dot{\mu}(S\hat{l}, \hat{l}') = \dot{\mu}(\hat{l}', S\hat{l}') + \dot{\mu}(\hat{l}, \hat{l}') + \dot{\sigma}(l', sl', sl) ,$$

relation qui n'est autre que la propriété (4.4) de cobord de $\dot{\sigma}$, vu l'antisymétrie (ia) dans le théorème 4.2 de l'indice de Maslov.

Théorème 5.5. *L'action de $\langle \mathrm{Sp} \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'}$ sur $\langle \Lambda \times \mathbb{Z}_8 \rangle_{l'}$ est donnée par*

$$(s, \dot{\mu})(l, \dot{\lambda}) = (sl, \dot{\mu} + \dot{\lambda} + \dot{\sigma}(l', sl', sl)) , \tag{i}$$

où l'on a

$$\mu \equiv n - \dim(sl' \cap l') , \qquad \lambda \equiv n - \dim(l \cap l') ,$$

$$\sigma(l', sl', sl) \equiv n + \dim(l' \cap sl') + \dim(l' \cap l) + \dim(l' \cap sl) , \quad \mathrm{mod}\ 2 ,$$

donc

$$\mu+\lambda+\sigma(l',sl',sl)\equiv n-\dim(sl\cap l')\,,\quad \operatorname{mod} 2\,. \qquad \text{(iii)}$$

Preuve. L'action de $(s,\dot{\mu})\in\langle \mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}_8\rangle_{l'}$ sur $(l,\dot{\lambda})\in\langle \Lambda\times\mathbb{Z}_8\rangle_{l'}$ est bien donnée par (i) vu le lemme précédent et les définitions (i) du théorème 5.2 et (5.3); les formules (ii) résultent alors immédiatement de (v) dans le théorème 3.2, de (iv) dans le théorème 4.2, et de la propriété (1.7) de σ; enfin (iii) est évident vu (ii).

Bibliographie

[1] V.I. Arnold, On a characteristic class intervening in quantum conditions, Func. Anal. Appl. 1 (1967) 1–14.

[2] J. Chazarain et A. Piriou, *Introduction à la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles* (Dunod, Paris, 1980).

[3] A. Crumeyrolle, La signification cohomologique de l'indice trilatère d'un triplet lagrangien et de l'indice de Maslov, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 284 (1977) 1129–1132.

[4] P. Dazord, Invariants homotopiques attachés aux fibrés symplectiques, Ann. Inst. Fourier Grenoble 29 (1979) no. 2, 25–78.

[5] M. Demazure, Classe de Maslov II. Exposé no. 10, Séminaire sur le fibré cotangent (Orsay, 1975–76).

[6] M. de Gosson, La définition de l'indice de Maslov sans hypothèse de transversalité, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 310 (1990) 279–282.

[7] M. de Gosson, La relation entre Sp_∞, revêtement universel du groupe symplectique Sp et $\mathrm{Sp}\times\mathbb{Z}$, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I 310 (1990) 245–248.

[8] M. de Gosson, Maslov indices on the metaplectic group $\mathrm{Mp}(n)$, Ann. Inst. Fourier Grenoble 40 (1990) no. 3, 537–555.

[9] M. de Gosson, The structure of q-symplectic geometry, J. Math. Pures Appl., à paraître.

[10] M. de Gosson, Une autre définition de l'indice de Maslov, non publié (1991).

[11] V. Guillemin et S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Math. Surv. 14 (A.M.S., Providence, RI, 1977).

[12] L. Hörmander, Fourier integral operators I, Acta Math. 127 (1971) 79–183.

[13] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Differential Operators III*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 274 (Springer, Berlin, Heidelberg, 1985).

[14] B. Kostant, Quantization and unitary representation I, Prequantization, dans: *Lectures in Modern Analysis and Applications, III*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 170 (Springer, Berlin, 1970) 87–208.

[15] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, Am. Math. Soc. Coll. Publ., 27 (1942).

[16] J. Leray, *Lagrangian Analysis and Quantum Mechanics* (MIT Press, Cambridge, London, 1981); *Analyse Lagrangienne*, R.C.P. 25 (Strasbourg, 1978; Collège de France 1976–77).

[17] G. Lion et M. Vergne, *The Weil Representation, Maslov Index and Theta Series*, Progress in Mathematics 6 (Birkhäuser, Basel, 1980).

[18] V.P. Maslov, *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, suivie de deux notes complémentaires de V.I. Arnold et V.C. Buslaev* (Dunod, Paris, 1972).

[19] L. Schwartz, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris, 1951).

[20] I.E. Segal, Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom (I), Mat. Fys. Medd. Dan. Vidensk. Selsk. 31 (12) (1959) 1–39.

[21] J.M. Souriau, Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications, 4th Intern. Coll. on Group Theoretical Methods in Physics (Nijmegen, 1975).

[22] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math. 111 (1964) 143–211.